

CASIO

CLASSWIZ
POTENCIAN TU CURIOSIDAD

Estadística

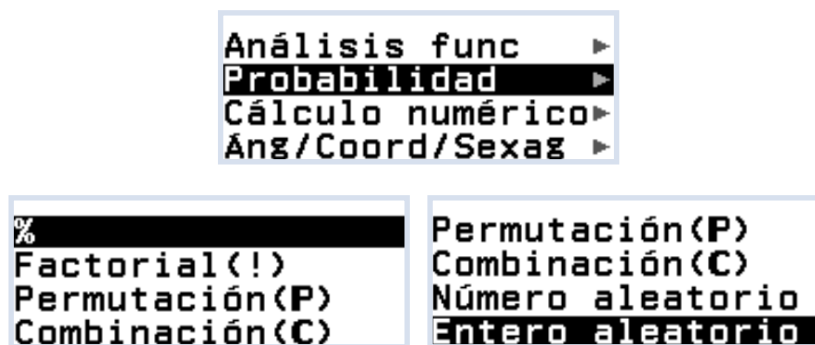
NIVEL AVANZADO



Estadística y probabilidad. Combinatoria.

1.1. COMBINATORIA Y PROBABILIDAD

En el menú **Calcular**, las funciones “Probabilidad” se encuentran en la tecla CATALOG:



La combinatoria se ocupa del recuento sistemático de objetos y situaciones con el fin de determinar probabilidades teóricas en muchas situaciones prácticas. Los números implicados en estas situaciones a menudo son muy grandes, por lo que se suele necesitar la calculadora.

Por ejemplo, el número de formas distintas en las que se puede ordenar un conjunto de objetos (lo que se conoce como número de permutaciones) a menudo implica factoriales de números.

El número de ordenaciones o permutaciones de n objetos distintos viene dado por el factorial de n , que se define como:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

El factorial de un número es a menudo muy grande, y no se puede calcular a mano. Para seleccionar el “Factorial” se pulsa CATALOG, “Probabilidad” y “Factorial”



EJEMPLO 1

Demuestra que $0!$ es 1

Dado que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ es trivial que

$$\frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n} = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$$

Y por tanto, cuando $n = 1$ queda:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1!}{1} = \frac{1 \cdot 0!}{1} = 0!$$

Para resolver este ejercicio con la calculadora hay que seguir los siguientes pasos:

1 1



EJEMPLO 2

Demuestra que $\binom{6}{1} = \binom{6}{5}$

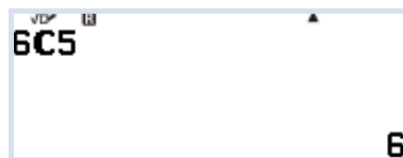
Dado que $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$, entonces

$$\binom{6}{1} = \frac{6!}{(6-1)! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5!}{5!} = 6$$

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{(6-5)! \cdot 5!} = \frac{6!}{5!} = 6$$

Para resolver este ejercicio con la calculadora hay que seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Pulsar 5



Paso 2: Pulsar 1





EJEMPLO 3

Obtén 6 números aleatorios de 3 cifras.

```
Permutación(P)
Combinación(C)
Número aleatorio
Entero aleatorio
```

Introduce "1000 \times " y pulsa EXE tantas veces como números desees:

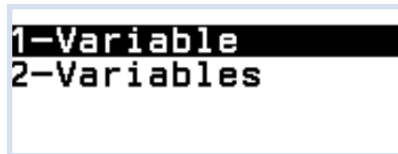
① ① ① ① \times EXE EXE EXE EXE EXE

$\sqrt{\text{D}}$ B 1000 \times Ran# 938	$\sqrt{\text{D}}$ B 1000 \times Ran# 987	$\sqrt{\text{D}}$ B 1000 \times Ran# 734
$\sqrt{\text{D}}$ B 1000 \times Ran# 859	$\sqrt{\text{D}}$ B 1000 \times Ran# 46	$\sqrt{\text{D}}$ B 1000 \times Ran# 34

Estadística unidimensional

El análisis estadístico de datos suele requerir de apoyo tecnológico. La calculadora es un buen soporte para la Estadística, ya que cuenta con herramientas para realizar diversos cálculos estadísticos de variables unidimensionales y bidimensionales.

La estadística unidimensional información sobre una sola variable. Para empezar, accede al menú **Estadística** y selecciona 1-variable (la otra opción implica datos bidimensionales):



Los datos unidimensionales a veces tienen frecuencias asociadas, de modo que cada valor puede repetirse varias veces. Para activar las frecuencias, hay que pulsar \odot "TOOLS", "frecuencia" y seleccionar "On".

2.1 ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL (1-VARIABLE)

La calculadora permite introducir hasta 160 registros para una sola variable, o un máximo de 80 si se incluyen las frecuencias.

Los parámetros estadísticos unidimensionales que proporciona la calculadora son:

\bar{x} : media muestral x

$\sum x$: suma de los datos de la muestra x

$\sum x^2$: suma de los cuadrados de los datos de la muestra x

σ_x^2 : varianza de la población x

σ_x : desviación estándar de la población x

S_x^2 : varianza de la muestra x

S_x : desviación estándar de la muestra x

n : número de elementos

$\min(x)$: valor más pequeño de los datos muestrales x

Q_1 : Primer cuartil

Med : mediana

Q_3 : Tercer cuartil

$\max(x)$: valor más grande de los datos muestrales x



EJEMPLO 1

Los triglicéridos viajan por la sangre unidos a una lipoproteína llamada VLDL que puede acumularse en las placas de ateroma. Tener un alto nivel de triglicéridos puede aumentar el riesgo de enfermedades del corazón, como la enfermedad de las arterias coronarias.

Las causas de la hipertrigliceridemia pueden ser genéticas, tener obesidad o diabetes, sedentarismo, malos hábitos alimenticios (dieta alta en grasas o hidratos de carbono simples, especialmente azúcar) y se ha asociado también a un elevado consumo de alcohol.

A continuación, se presentan los niveles de triglicéridos de 12 pacientes (en mg/dl):

70, 40, 267, 414, 70, 83, 174, 196, 93, 123, 148, 99

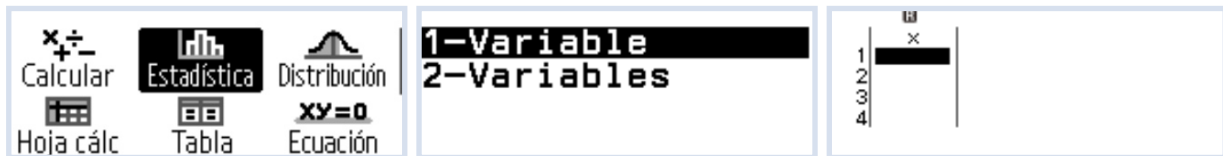
A partir de estos datos,

a) Calcule media y la mediana

Para resolver este ejercicio hay que seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Pulsar en \odot .

Paso 2: Pulsar en el menú **Estadística** + “una variable” + \odot :



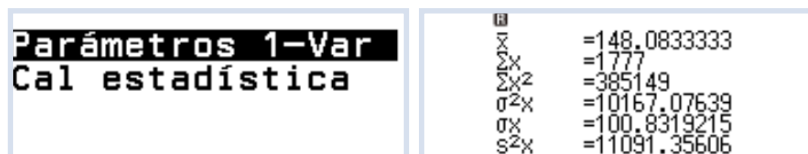
Paso 3: Se introducen los datos:

Para introducir los datos hay que pulsar el valor en el teclado y después \odot .

Si se comete un error al introducir un valor antes de pulsar la tecla \odot se puede corregir, se rectifica y se presiona \odot . Si se detecta un error en un registro se utiliza el cursor para seleccionarlo y se introduce el valor correcto. A medida que se introducen los datos, es posible desplazarte hacia arriba y hacia abajo usando los cursores, \wedge y \vee . Para desplazarse desde el último valor al primero, y viceversa hay que usar las \wedge y \vee .



Paso 4: Pulsar en \odot + **Parámetros 1-Var** + \odot para ver más parámetros:



$$\bar{x} = 148,083 \frac{mg}{dl}$$

$$Med = 111 \frac{mg}{dl}$$

Nota: Se puede activar la columna de las frecuencias en **TOOLS**.

b) Calcule el rango y la desviación típica.

Max(x) = 414, y el Min(x) = 40. Por tanto el rango = $414 - 40 = 374$

$s_x = 105.3155072$ $n = 12$ $\min(x) = 40$ $Q_1 = 76.5$ $Med = 111$ $Q_3 = 185$	$\max(x) = 414$
$\max(x) - \min(x) = 374$	

Nota: para poder operar con los parámetros obtenidos, se pulsa "CATALOG" y se accede a "Estadística".

Aquí se encuentran los parámetros clasificados en:

Sumatorios, Media/Var/Desv..., Mín/máx/Cuartil y Distrib Normal.

La desviación estándar obtenida es: $S = 105,32\text{mg/dl}$

Cabe recordar que la calculadora toma las siguientes fórmulas para el cálculo de los parámetros estadísticos.

Fórmula de cálculo estadístico con variable única:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

c) ¿Entre qué valores del nivel de triglicéridos se encuentran el 50% de los individuos más frecuentes?

Se trata de hallar el valor de los percentiles 25 y 75, que es lo mismo que el Q_1 y Q_3 :

$s_x = 105.3155072$ $n = 12$ $\min(x) = 40$ $Q_1 = 76.5$ $Med = 111$ $Q_3 = 185$

$$Q_1 = 76,5 \quad Q_3 = 185$$

Por lo que el nivel de triglicéridos del 50% de los individuos más frecuentes se encuentra entre 76,5 y 185 mg/dl.

d) ¿Qué porcentaje de valores se encuentran a una desviación típica respecto a la media?

Se trata de hallar el intervalo:

$$(\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x) = (148,08 - 105,32; 148,08 + 105,32) = (42,77; 253,40)$$

$\bar{x} - s_x = 42.76782612$ $\bar{x} + s_x = 253.3988406$
--

Y contar cuántos valores se encuentran en el mismo. En este, caso un 75 % de los valores.

e) Calcule el nivel de triglicéridos superado únicamente por el 25% de los individuos.

Se trata del percentil 75 o $Q_3 = 185$ mg/dl

NOTA: Se pueden dibujar gráficos mediante el código QR (📄📄), en la página web:

<https://classpad.net/>

ATENCIÓN

Si cambiamos de modo en la calculadora, al volver al Modo Estadística, los datos introducidos previamente se conservarán, NO se habrán eliminado.

2.2 FRECUENCIA DE DATOS

A veces, un conjunto unidimensional de datos comprende más de 160 observaciones, este es el máximo número de registro que se pueden introducir en la calculadora.

Para activar las frecuencias, se pulsa la tecla "TOOLS" (🛠️) se baja (⏴) hasta "Frecuencia" y se pulsa "Ok". De esta forma aparecerán dos columnas, la del dato estadístico y la de la frecuencia:



	x	Frec
1		
2		
3		
4		

Cuando se activa la columna de las Frecuencias, el número máximo de registro es 80.

Estadística bidimensional (2-variables)

La estadística bidimensional implica datos con dos variables, por lo que el interés se centra en la relación entre dichas variables. La calculadora asume que las variables se denominan x e y, respectivamente. Para empezar se entra en menú **Estadística** y selecciona 2-variables:



1-Variable
2-Variables

Los parámetros bidimensionales que proporciona son:



Parámetros 2-Var
Calcular regres ▶
Cal estadística ▶

\bar{x} : media muestral x

$\sum x$: suma de los datos de la muestra x

$\sum x^2$: suma de los cuadrados de los datos de la muestra x

σ_x^2 : varianza de la población x

σ_x : desviación estándar de la población x

S_x^2 : varianza de la muestra x

S_x : desviación estándar de la muestra x

n: número de elementos

\bar{y} : media muestral y

$\sum y$: suma de los datos de la muestra y

$\sum y^2$: suma de los cuadrados de los datos de la muestra y

σ_y^2 : varianza de la población y

σ_y : desviación estándar de la población y

S_y^2 : varianza de la muestra y

S_y : desviación estándar de la muestra y

$\sum xy$: suma de los productos de los datos x e y de la muestra

$\sum x^3$: suma de los cubos de los datos de la muestra

$\sum x^2y$: suma de los productos de los cuadrados de x por y

$\sum x^4$: suma de los bicuadrados de los datos de la muestra x

$\min(x)$: valor más pequeño de los datos muestrales x

$\max(x)$: valor más grande de los datos muestrales x

$\min(y)$: valor más pequeño de los datos muestrales y

$\max(y)$: valor más grande de los datos muestrales y

Para los cálculos de regresión, la calculadora permite ajustar 7 tipos de funciones:

1-Variable 2-Variables	Parámetros 2-Var Calcular regres ▶ Cal estadística ▶
$y=a+bx$ $y=a+bx+cx^2$ $y=a+b \cdot \ln(x)$ $y=a \cdot e^{(bx)}$	$y=a \cdot e^{(bx)}$ $y=a \cdot b^x$ $y=a \cdot x^b$ $y=a+b/x$

EJEMPLO 1

Las horas de estudio y las calificaciones en Matemáticas de siete alumnos han sido:

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
Horas de estudio(x)	3	18	13	17	18	15	4	10	5	3
Matemáticas (y)	3	9,5	6	7	5	5	3	9	4	1

a) Calcule la media aritmética de las dos variables, así como su desviación típica.

Paso 1: Pulsar en \odot .

Paso 2: Pulsar en el menú estadística + EXE + \odot 2-Variable + EXE :

Paso 3: Se escriben los datos:

Paso 4: Pulsar en OK + Parámetros 2-Var + \odot para ver más parámetros.

\bar{x} = 10,6 Σx = 106 Σx^2 = 1490 $\sigma^2 x$ = 36,64 σx = 6,05309838 $s^2 x$ = 40,71111111	$s x$ = 6,380525927 n = 10 \bar{y} = 5,25 Σy = 52,5 Σy^2 = 341,25 $\sigma^2 y$ = 6,5625
σy = 2,561737691 $s^2 y$ = 7,291666667 $s y$ = 2,700308624 Σxy = 667 Σx^3 = 23392 $\Sigma x^2 y$ = 9944	Σx^4 = 383702 $\min(x)$ = 3 $\max(x)$ = 18 $\min(y)$ = 1 $\max(y)$ = 9,5

$$\bar{x} = 10,6 \text{ horas}$$

$$\bar{y} = 5,25$$

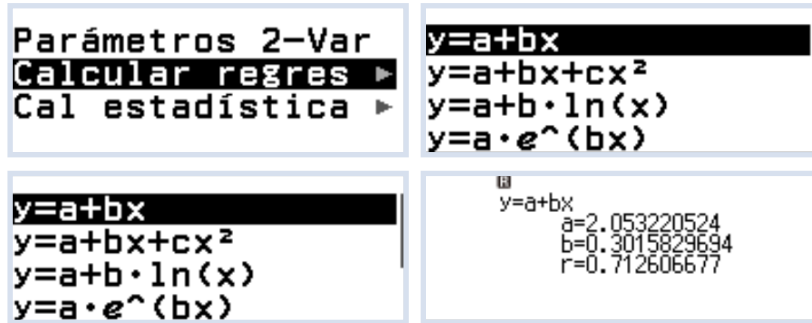
$$S_x = 6,38 \text{ horas}$$

$$S_y = 2,70$$

b) Calcule el coeficiente de correlación entre las calificaciones en Matemáticas y las horas de estudio de esos alumnos.

Paso 1: Pulsar en \odot para volver a los datos.

Paso 2: Pulsar \odot +Calcular regres + \odot + $y=a+bx$ + \odot :



El coeficiente de correlación es: $r = 0,71$

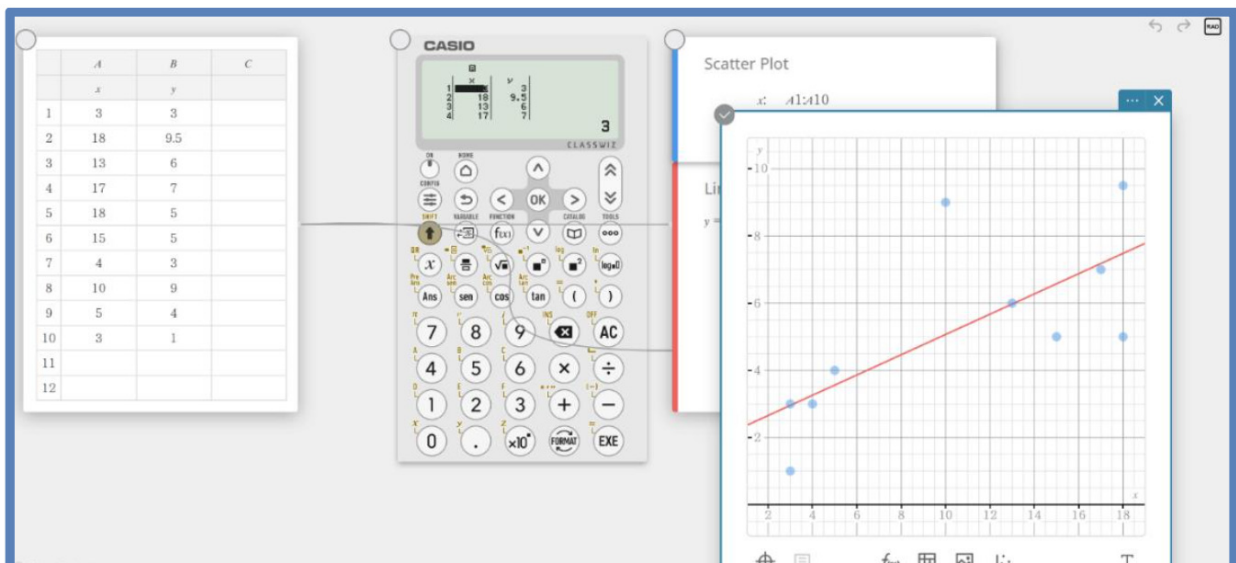
Como el valor es positivo indica una correlación positiva y buena.

$$r^2 = 0,71^2 = 0,507.$$

Por otra parte, r^2 se le denomina porcentaje de variabilidad explicado por el modelo de regresión. En este caso, las horas de estudio explican el 50,7% de la varianza de nota en matemáticas:

Valores r	Magnitud
0,001 - 0,25	Baja
0,25-0,50	Moderada
0,50-0,75	Buena
0,75-1	Muy buena

NOTA: se puede dibujar la recta mediante el código QR (\uparrow \otimes) generado en la pantalla de la tabla de datos. La gráfica se visualiza en la web <https://classpad.net/>



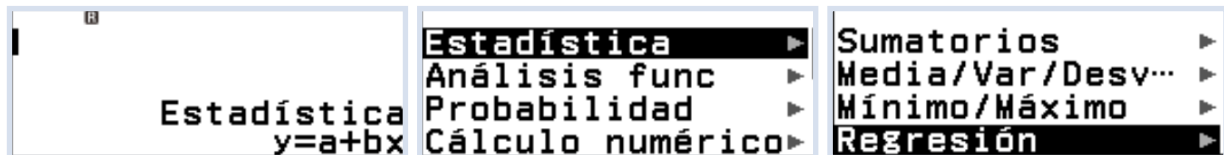
c) Calcule la recta de regresión de Y sobre X.

Según los resultados del apartado anterior la recta de regresión es:

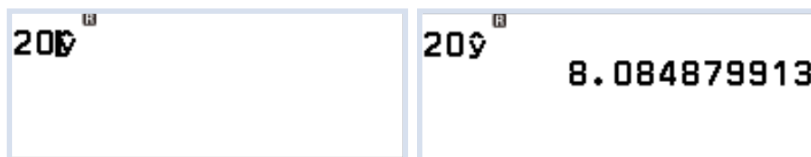
$$y = 0,3016x + 2,05$$

Para determinar las calificaciones estimadas según el número de horas que estudian:

Desde el menú **Estadística** y cuando aparecen los datos introducidos, pulsar en OK+ Cal estadística + "y =a+bx" + CATALOG $\text{\textcircled{M}}$ + Estadística +Regresión + \hat{y} .



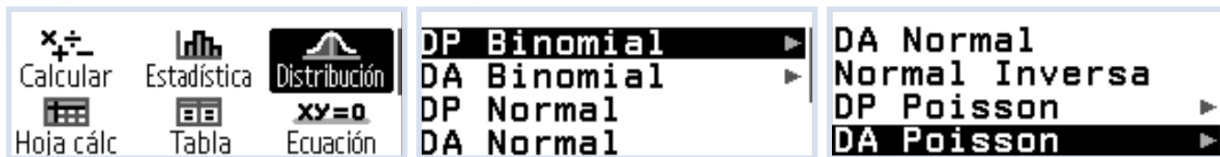
Y agregar delante 20:



Así pues, si un alumno estudia 20 horas se estima, que obtendrá un 8,085.

Distribuciones de probabilidad

En el menú **Distribución**, la calculadora permite trabajar con:



Opción de Menú	Cálculo
DP Binomial	Probabilidad binomial
DA Binomial	Distribución binomial acumulada
DP Normal	Densidad de probabilidad normal
DA Normal	Distribución normal acumulada
Normal Inversa	Distribución normal acumulada inversa
DP Poisson	Probabilidad Poisson
DA Poisson	Distribución Poisson acumulada

EJEMPLO 1



Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más, es $2/3$. Hállese la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

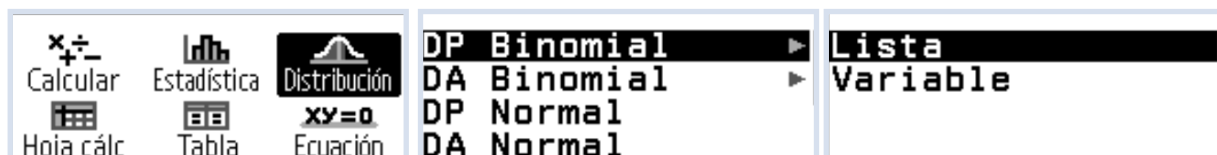
a) Las cinco personas.

Se trata de una binomial $B(5, 2/3)$.

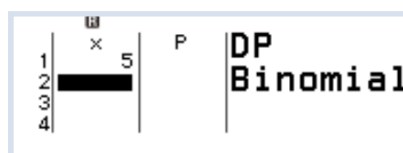
Hay que calcular $P(x=5)$.

Paso 1: Pulsar en \odot .

Paso 2: Pulsar en el menú **Distribución** + EXE + DP Binomial + EXE + Lista (También se puede usar la opción "Variable"):



Paso 3: Introducir el valor de la probabilidad y pulsar EXE :



Paso 4: Introducir los valores de la binomial.

DP Binomial N : 1 P : 0 Ejecutar	DP Binomial N : 5 P : 2÷3 Ejecutar	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>P</td><td>DP Binomial</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.1316</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table>	x	P	DP Binomial	1	0.1316		2			3			4		
x	P	DP Binomial															
1	0.1316																
2																	
3																	
4																	

NOTA: cuando se introducen los valores hay que pulsar EXE y después "Ejecutar".
 $P(x=5) = 0,1316$

b) Al menos tres personas.

Hay que calcular $P(x \geq 3)$:

$$P(x \geq 3) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = 0,3292 + 0,3292 + 0,1316 = 0,79$$

Se siguen los pasos descritos en el apartado anterior, y se introducen los valores 3, 4 y 5:

<table border="1"> <tr><td>x</td><td>P</td><td>DP Binomial</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.3292</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>0.3292</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>0.1316</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table>	x	P	DP Binomial	1	0.3292		2	0.3292		3	0.1316		4			3
x	P	DP Binomial														
1	0.3292															
2	0.3292															
3	0.1316															
4																

Se puede obtener el mismo resultado utilizando la opción DA Binomial (distribución binomial acumulada) y teniendo en cuenta que hemos de pulsar "Variable".

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - 0,2098 = 0,79$$

DA Binomial x : 2 N : 5 P : 2÷3	P= 0.2098765432
--	------------------------

c) Exactamente dos personas.

$$P(x=2) = 0,16$$

DP Binomial x : 2 N : 5 P : 0.6666	P= 0.1646090535
--	------------------------

EJEMPLO 2

CASIO observa que el número de componentes que fallan en el nuevo modelo de calculadora científica fx-570/991SP CW antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

X = número de componentes que fallan en la calculadora antes de cumplir 100 h.

Poisson de $\lambda = 8$

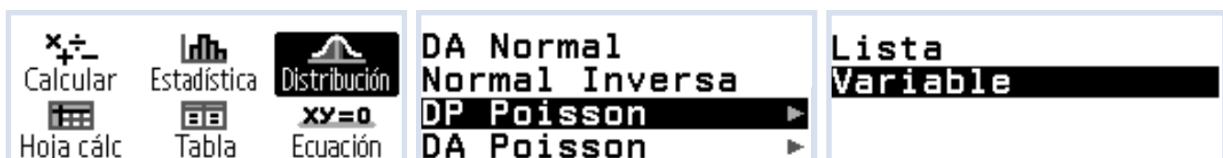
Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, se asume que la variable que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 2$:

$$\frac{100}{8} = \frac{25}{x} \rightarrow x = 2$$

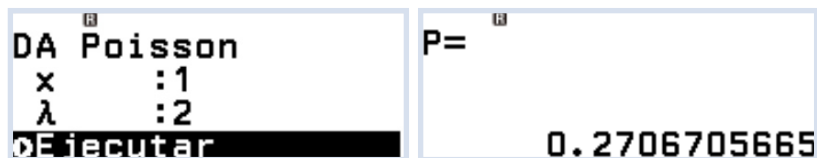
Hay que calcular $P(x=1)$.

Paso 1: Pulsar en \odot .

Paso 2: Pulsar en el menú **Distribución** + \odot + DP Poisson + \odot + Lista o Variable:



Paso 3: Introducir los valores, y pulsar \odot y "ejecutar":



Al introducir los valores hay que pulsar EXE y Ejecutar.

$$P(x=1) = 0,2707$$

b) ¿Y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, se asume que la variable que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 50 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 4$:

$$\frac{100}{8} = \frac{50}{x} \rightarrow x = 4$$

Hay que calcular $P(x \leq 2)$.

Paso 1: Pulsar en \odot .

Paso 2: Pulsar en el menú **Distribución** + \odot + DA Poisson + \odot + Lista o Variable:



Paso 3: Introducir los valores, y pulsar \odot y "ejecutar":

DA Poisson x : 2 λ : 4 Ejecutar	P= 0.2381033056
--	------------------------

$$P(x \leq 2) = 0,238$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, se asume que la variable que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 10$:

$$\frac{100}{8} = \frac{125}{x} \rightarrow x = 10$$

Hay que calcular $P(x \geq 10) = 1 - P(x < 10)$.

Se pulsa \odot , se introducen los valores se pulsa EXE y "ejecutar":

DA Poisson x : 9 λ : 10 Ejecutar	P= 0.4579297391
---	------------------------

$$P(x \geq 10) = 1 - P(x < 10) = 1 - 0,4579 = 0,5421$$

EJEMPLO 3

Suponga que el nivel de glucosa en sangre se distribuye en una población según un modelo normal con media 90 mg/dl y una desviación típica de 25 mg/dl. Si se selecciona un individuo al azar de dicha población calcular:

a) Probabilidad de que su nivel de glucosa esté comprendido entre 70 y 120 mg/dl

X = nivel de glucosa en sangre

X sigue una distribución normal de media 90 ml/dl y desviación típica 25 N(90, 25)

Hay que calcular $P(70 \leq x \leq 120)$.

Paso 1: Pulsar en \odot .

Paso 2: Pulsar en el menú **Distribución** + EXE + DA Normal + EXE :

$\times \div$ Calcular $\frac{\square}{\square}$ Hoja cálcul $\square \square$ Tabla \square Ecuación	\square Distribución $xy=0$	DP Binomial DA Binomial DP Normal DA Normal	DA Normal Inf. : 0 Sup. : 0 μ : 0
--	-------------------------------------	--	--

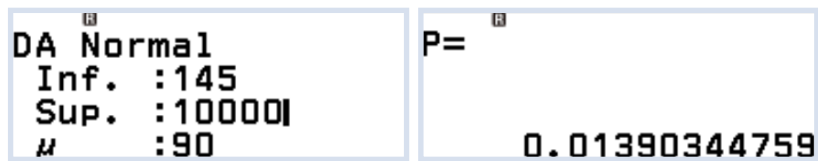
Paso 3: Introducir los valores de la probabilidad y pulsar en Ejecutar

DA Normal Inf. : 70 Sup. : 120 μ : 90	DA Normal Sup. : 120 μ : 90 σ : 25	P= 0.6730749312
--	---	------------------------

$$P(70 \leq x \leq 120) = 0,673$$

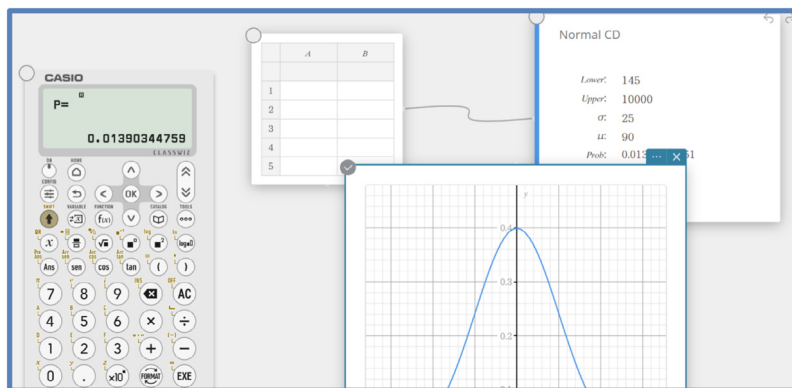
b) Probabilidad de que su nivel de glucosa sea superior a 145 mg/dl

De la misma forma que en el apartado anterior, se obtiene $P(x \geq 145) = 0,0139$



En el valor "Sup." se introduce un valor alto, por ejemplo (10.000) para realizar correctamente el cálculo.

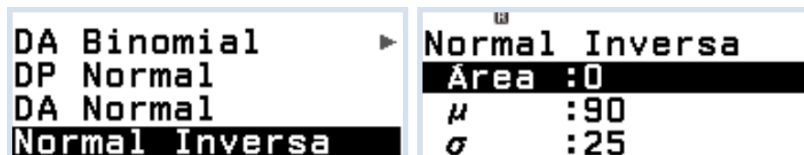
Si se escanea el código QR que se genera en la calculadora () se puede visualizar el gráfico de la distribución normal:



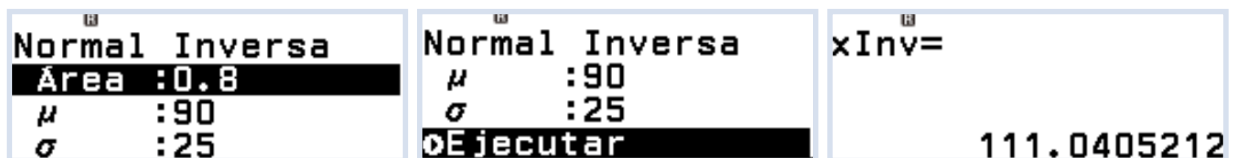
c) ¿Cuál es el nivel de glucosa superado únicamente por el 20% de los individuos de la población?

En este caso hay que calcular el valor del percentil 80. Hay que utilizar la opción "Normal Inversa".

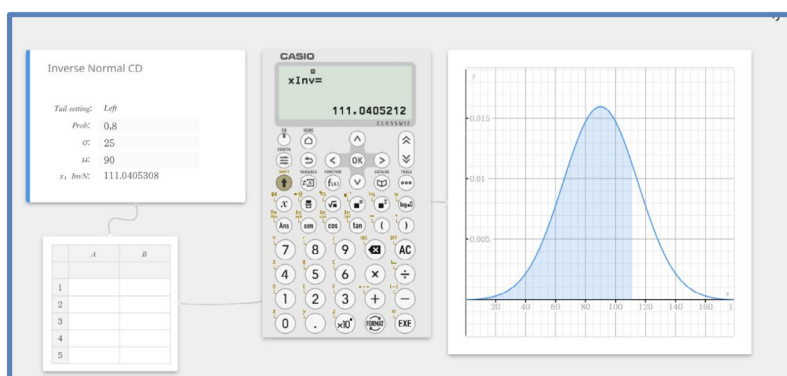
Paso 1: Pulsar en el menú **Distribución** + + Normal Inversa + :



Paso 2: Introducir los valores y pulsar "Ejecutar":

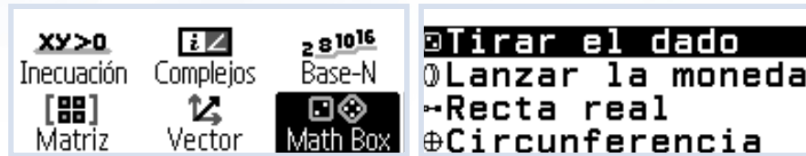


El nivel de glucosa superado por el 20% de los individuos es de 111,04 mg/dl.



Simulaciones

En el menú **Math Box**, se puede simular la tirada de dados y monedas:



Opción de Menú	Tipo de cálculo
<p>TIRAR EL DADO</p>	<p>Función que simula la probabilidad en el lanzamiento de dados. En el ejemplo se lanza un dado y se observan las frecuencias de cada resultado.</p>
<p>LANZAR LA MONEDA</p>	<p>Función que simula la probabilidad en el lanzamiento de monedas. En el ejemplo se lanza una moneda y se observan las frecuencia con que se obtiene cara o cruz.</p>
<p>RECTA REAL</p>	<p>Registra un máximo de tres desigualdades y las representa con la recta real.</p>
<p>CIRCUNFERENCIA UNIDAD</p>	<p>Muestra las razones trigonométricas de un ángulo en la circunferencia unidad, semicircunferencia ó en un reloj.</p>

NOTAS

Puedes encontrar datos reales en las siguientes páginas:

<https://www.ine.es/>

<https://www.nba.com/stats>

<https://www.laliga.com/estadisticas/laliga-santander/goleadores>

<https://ec.europa.eu/eurostat/>

<https://www.atptour.com/en/stats>

<https://www.who.int/es/data/gho/publications/world-health-statistics>

<https://datos.bancomundial.org/>

<https://datasetsearch.research.google.com/>